

Das Unheimliche einer Exponentialfunktion

Jeder kennt die Allianz-Arena in München. Mit Google-Earth lässt sich die Grundfläche mit $A = 47000 \text{ m}^2$ bestimmen. Ferner kann man auch das Volumen des Stadions ermitteln. Es sind 2,9 Millionen m^3 oder mathematisch $V = 2,9 \cdot 10^6 \text{ m}^3$.

Sie sitzen ganz oben im Stadion und es fängt an zu regnen. Es ist ein ganz besonderer Regen, nämlich jede Sekunde fällt nur ein Regentropfen ins Stadion. Ein Tropfen hat ein Volumen $V_R = 0,05 \text{ ml}$ oder mathematisch $V_R = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Liter}$. Man kann weiter umrechnen $V_R = 5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3$.

1. Frage: Wie lange dauert es, bis auf dem Rasen 1 mm Wasserhöhe entsteht?

Antwort: Wassermenge $V = 47000 \text{ m}^2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 47 \text{ m}^3$

$$\text{Zeit } t = \frac{47 \text{ m}^3}{5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3} = 30 \text{ Jahre}$$

Und nun zur Exponentialfunktion. Der Reproduktionsfaktor $R = 1,03$. Der Wert ist nicht besonders groß. Das heißt: Jeder nachfolgende Tropfen ist um 1,03 größer als der vorherige Tropfen.

2. Frage: Wie lange dauert es, bis Sie auf dem obersten Rang gehen müssen um nicht zu ertrinken?

Antwort: $V(t) = \frac{V_R}{1 \text{ Sekunde}} \cdot \int_0^T 1.03^t \cdot dt$

$$V_t = \frac{V_R}{1 \text{ Sekunde}} \cdot \left[\frac{1.03^t}{\ln(1.03)} \right]_0^T$$

$$V_T \approx \frac{V_R}{1 \text{ Sekunde}} \cdot \frac{1.03^T}{\ln(1.03)}$$

$$1.03^T = \frac{V_T}{\frac{V_R}{1\text{Sekunde}}} \cdot \ln(1.03)$$

$$T \cdot \ln(1.03) = \ln\left(\frac{V_T}{\frac{V_R}{1\text{Sekunde}}} \cdot \ln(1.03)\right)$$

$$T = \frac{\ln\left(\frac{V_T}{\frac{V_R}{1\text{Sekunde}}} \cdot \ln(1.03)\right)}{\ln(1.03)}$$

$$T = 953 \text{ Sekunden}$$

Sie sollten also das Stadion in spätestens 953 Sekunden oder 15,8 Minuten verlassen.

3. Frage: Welchen Durchmesser hat der letzte Tropfen?

Antwort: $V = V_R \cdot (1.03)^{953}$
 $V = 85673 \text{ m}^3$

Das Volumen einer Kugel berechnet sich nach der Formel $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$.

Daraus ergibt sich ein Durchmesser $d = 56,7 \text{ m}$

Das ist kein Tropfen, sondern eher ein Bomben-Tropfen!

Viel Freude über die gewonnene Erkenntnis bezüglich Exponentialfunktionen.